СЕКЦИЯ 1. СОВРЕМЕННАЯ РОССИЙСКАЯ НАУКА

УДК 517

EDN: CRLLXF

Решение вырожденной системы линейных рекуррентных соотношений первого порядка

В.И. Усков

Воронежский государственный лесотехнический университет им.
Г.Ф. Морозова, ул. Тимирязева, 8,
Воронеж, 394087, Россия

*E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация. Исследуется начальная задача для системы линейных рекуррентных соотношений первого порядка с вырожденным оператором при старшем члене. Этот оператор обладает свойством фредгольмовости. С помощью леммы о решении линейного уравнения с таким оператором система и начальное условие расщепляются на соответствующие систему и начальное условие в подпространствах меньших размерностей. Получены условия, при которых решение существует, единственно; найдено это решение. Приводится иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: система линейных рекуррентных соотношений, первый порядок, фредгольмов оператор, решение

Solution of a degenerate system of linear first order recurrent relations

V.I. Uskov

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, 8 Timiryazeva st., Voronezh, 394087, Russia

*E-mail: vum1@yandex.ru

Abstract. We study the initial problem for a system of linear first order recurrence relations with a degenerate operator at the highest term. This operator has the Fredholm property. Using the lemma on solving a linear equation with such an operator, the system and initial condition are split into the corresponding system and initial condition in subspaces of lower dimensions. Conditions are obtained under which the solution exists, uniquely; found this solution. An illustrative example is given.

Keywords: system of linear recurrence relations, first order, Fredholm operator, solution

1. Предварительные сведения

Пусть линейный оператор A действует в банаховом пространстве E.

Свойство. Свойство фредгольмовости оператора $\mathrm{A}: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ (далее, свойство Φ_0), влечет следующие разложения в прямые суммы подпространств:

$$E = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Coim}\, A, \quad E = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Coker}\, A,$$

где Ker A – ядро, Coim A – прямое дополнение к Ker A, Im A – образ, Coker A – дефектное подпространство; $\dim \mathrm{Ker\,A} = \dim \mathrm{Coker\,A} < \infty$; сужение $\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}|_{\mathrm{Coim\,A} \cap \mathrm{dom\,A}}$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{\mathrm{A}}^{-1}$ [1].

Замечание. Всякий линейный оператор $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, задаваемый вырожденной квадратной матрицей, обладает свойством Φ_0 [2].

Далее рассматривается случай $\dim \mathrm{Ker\,A} = 1$. Вводятся: проектор Q на Coker A, полуобратный оператор $\mathrm{A}^- = \widetilde{\mathrm{A}}^{-1}(\mathrm{I} - \mathrm{Q}): \mathrm{Im\,A} \to \mathrm{Coim\,A} \cap \mathrm{dom\,A}$, элементы $\mathrm{e} \in \mathrm{Ker\,A}$, $\mathrm{e} \neq 0$, $\varphi \in \mathrm{Coker\,A}$. В подпространстве Coker A вводится скалярное произведение $<,>$ так, что $< \varphi, \varphi >= 1$.

Лемма 1. Линейное уравнение $\mathrm{Ax} = \mathrm{y}$, $\mathrm{x} \in \mathrm{E} \cap \mathrm{dom\,A}$, $\mathrm{y} \in \mathrm{E}$, равносильно системе [3]

$$x = A^- y + z, \quad \forall z \in \mathrm{Ker}\, A,$$

$$< Qy, \varphi >= 0.$$

Рассмотрим начальную задачу для линейного рекуррентного соотношения (далее, ЛРС) первого порядка:

$$u_{n+1} = D u_n + g_n, \tag{1}$$

$$u_0 = a \in \mathbb{R}^m, \tag{2}$$

где D – линейный оператор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, g_n – заданная последовательность со значениями в $\mathbb{R}^m$; $n > 0$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается последовательность u_n, удовлетворяющая (1) при любом $n > 0$ и (2).

Лемма 2. Решение задачи (1), (2) единственно и определяется формулой

$$u_n = D^n a + \sum_{j=0}^{n-1} D^{n-1-j} g_j. \tag{3}$$

Лемма доказывается непосредственной подстановкой.

Задача (1), (2) решена в [4] в частных случаях собственных значений оператора D: 1) вещественных, имеющих единичную алгебраическую кратность; 2) кратных вещественных; 3) комплексных.

2. Лемма о регуляризации вырожденного ЛРС первого порядка

Рассматривается ЛРС первого порядка

$$Au_{n+1} = Bu_n + f_n, \tag{4}$$

где A, B – линейные операторы: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\det A = 0$, f_n – заданная последовательность со значениями в $\mathbb{R}^m$; $n > 0$.

Регуляризировать ЛРС (4) – значит разрешить его относительно u_{n+1}. Для этого применим лемму 1 и замечание.

<u>1 шаг</u>. Сведем его к равносильной системе:

$$u_{n+1} = A^{-}Bu_n + A^{-}f_n + c_n e, \tag{5}$$

$$< QBu_n, \varphi > + < Qf_n, \varphi >= 0, \tag{6}$$

где c_n – искомая последовательность из $\mathbb{R}^m$. Далее, заменив в равенстве (6) $n \to n + 1$ и подставив выражение (5), получим

$$< QBA^{-}Bu_n, \varphi > + < QBA^{-}f_n, \varphi > + c_n < QBe, \varphi > + < Qf_{n+1}, \varphi >= 0. \tag{7}$$

Если $< QBe, \varphi >\neq 0$, то из последнего соотношения можно выразить c_n и подставить в (5); регуляризация соотношения (4) на этом заканчивается.

<u>2 шаг</u>. Если же $< QBe, \varphi >= 0$, то равенство (7) – это

$$< QBA^{-}Bu_n, \varphi > + < QBA^{-}f_n, \varphi > + < Qf_{n+1}, \varphi >= 0. \tag{8}$$

Вновь заменив в нем $n \to n + 1$ и подставив выражение (5), получим равенство

$$< QB(A^{-}B)^2u_n, \varphi > + < QBA^{-}BA^{-}f_n, \varphi > + c_n < QBA^{-}Be, \varphi > \tag{9}$$

$$+ < QBA^{-}f_{n+1}, \varphi > + < Qf_{n+2}, \varphi >= 0.$$

Если $< QBA^{-}Be, \varphi >\neq 0$, то из последнего соотношения можно выразить c_n и подставить в (5); регуляризация соотношения (4) заканчивается. В противном случае переходим к следующему шагу и действуем аналогично.

Вводятся обозначения:

$$S_k =< QB(A^{-}B)^k(\cdot), \varphi >, \quad d_k = S_k e, \quad k = 0,1, \ldots,$$

$$F_0 =< Qf_n, \varphi >,$$

$$F_{kn} = \sum_{j=0}^{k-1} S_{k-1-j} A^- f_{n+j} +< Qf_{n+k}, \varphi > , \;\; k = 1,2, \dots .$$

Условие P. Пусть существует число $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, равное $p = \min\{k: \; d_k \neq 0\}$. Тогда на (p + 1) шаге получим равенство для определения c_n, аналогичное (6), (8):

$$c_n d_p = -S_{p+1} u_n - F_{p+1,n}.$$

Выразив из него c_n и подставив в (5), получим регуляризированное соотношение вида (1) в обозначениях

$$\begin{gathered} D = A^- B - \left(d_p\right)^{-1} S_{p+1} \cdot e, \\ g_n = A^- f_n - \left(d_p\right)^{-1} F_{p+1,n} \cdot e. \end{gathered} \tag{10}$$

Тем самым, получено следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть выполнено условие P. Тогда соотношение (4) равносильно системе из соотношения (1), (10) и равенств

$$S_k u_n + F_{kn} = 0, \;\; k = 0,1, \dots , p. \tag{11}$$

Лемма 4. Пусть f_n – ограниченная последовательность. Тогда оператор D и последовательность g_n, определяемые формулами (10), ограничены.

Действительно, $A^- B \colon \mathbb{R}^m \to \mathrm{Coim}\, A \cap \mathrm{dom}\, A$, $A^- f_n \in \mathrm{Coim}\, A \cap \mathrm{dom}\, A$ ограничены, так как действуют в конечномерных пространствах. Далее, $\|e\| < \infty$, $\|\varphi\| = \sqrt{< \varphi, \varphi >} = 1$. Возьмем элемент $v \in \mathbb{R}^m$. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, имеем:

$$\|S_k v\| = |< QB(A^- B)^k v, \varphi >| \leq \|QB\| \|(A^- B)^k\| \|v\| \|\varphi\| = \mu_0 \|v\|,$$

где $\mu_0 = \|QB\| \|(A^- B)^k\| = \mathrm{const} > 0$. Далее, пользуясь неравенством треугольника, имеем:

$$\|Dv\| = \|A^- Bv\| + \left|\left(d_p\right)^{-1}\right| \|S_{p+1} v\| \cdot \|e\| \leq \|A^- B\| \|v\| + \left|\left(d_p\right)^{-1}\right| \mu_0 \|v\| \cdot \|e\| = \mu_1 \|v\|$$

с положительной постоянной $\mu_1 = \|A^- B\| + \left|\left(d_p\right)^{-1}\right| \mu_0 \|e\|$, что и влечет ограниченность оператора D.

Ограниченность g_n доказывается аналогично.

Теперь рассмотрим начальную задачу (4), (2).

Применив леммы 2, 3, 4, получим следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнено условие P. Пусть $\mathrm{f_n}$ – ограниченная последовательность. Тогда решение задачи (4), (2) существует при выполнении условий

$$S_k a + F_{k0} = 0,\ \ k = 0,1,\dots,p. \tag{12}$$

Оно единственно и определяется формулой (3) с обозначениями (10). Это соотношение обладает свойством (11).

3. Иллюстративный пример

Рассмотрим однородную задачу при $n \geq 0$:

$$v_{n+1} = v_n + 2w_n, \tag{13}$$

$$0 = 2v_n + 3w_n, \tag{14}$$

$$v_0 = b,\ \ w_0 = c. \tag{15}$$

Это задача вида (4), (2) с вектор-последовательностью $u_n = \begin{pmatrix} v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, линейными операторами $A, B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и начальной вектор-последовательностью $u_0 = a = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$.

В силу теоремы система имеет решение при выполнении равенства

$$S_0 a = 0,$$

то есть,

$$2b + 3c = 0. \tag{16}$$

Соотношение (14) – это равенство $S_0 u_n = 0$ из леммы 3. Выразив из него w_n и подставив в (13), получим решение

$$v_n = b\left(-\frac{1}{3}\right)^n,\ \ w_n = -\frac{2}{3}b\left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

удовлетворяющее (13), (14), (15), (16).

Список литературы

1. Никольский, С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1943. – Т. 7, вып. 3. – С. 147-166.
2. Усков В. И. Решение задач для уравнений соболевского типа методом каскадной декомпозиции / В. И. Усков // Дисс… канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2019. – 137 с.
3. Zubova, S. P. Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case / S. P. Zubova, V. I. Uskov // Mathematical Notes. – 2018. – 103(3). –395-404 p.
4. Усков, В. И. Решение одной системы линейных рекуррентных соотношений первого порядка / В. И. Усков, Т. Л. Бурчакова, В. А. Довгаль // Молодой ученый. – 2020. – № 9(299). – С. 1-5.